

第二版前言

本书第二版对第一版进行了修订和充实. 第 2、5~8 章内容均有所增加, 但总的结构没有变. 第 2 章增加了光脉冲自聚的多焦点现象, 光束传输的 $ABCD$ 定理以及光脉冲的“超光速传输”. 第 6 章增加的 6.4.2 节“不取旋波近似情形二能级原子的共振荧光谱”是参照了刘仁红同志的文章写成的. 第 7 章增加的 7.8 节“原子的玻色-爱因斯坦凝聚”是参照闫珂柱教授的论文写成的. 第 2、5、8 章增加的内容, 部分参照了赵超樱、郭奇志等同志的相关研究.

最后借此机会感谢李师群教授对编写本书的关心与支持.

谭维翰

上海大学宝山校区

2011 年 8 月

第一版前言

1960年激光出现以前,光学处理的主要是经典的如光的干涉、衍射以及几何光学的成像等问题.理论基础是几何光学、波动光学,主要体现在 Maxwell 方程.有关黑体辐射的量子理论一般放在原子物理中.到激光出现后,为了弄清楚激光产生的物理过程,要用量子力学方法处理原子能级间的跃迁,而光仍然用经典方法进行描述.于是半经典理论诞生了.这个理论很有用处,几乎大部分激光物理,非线性光学现象均能得到解释.唯有涉及光的基本性质,特别是光的相干统计性质与量子起伏,已超出了半经典理论的范畴,需要对光场也进行量子化,即所谓全量子理论.于是量子光学的研究引起了人们的注意.其实很早(1949)Hanbury-Brown 与 Twiss 的强度干涉实验就是典型的量子光学实验.所用的光子符合计数正是现在量子光学实验最为常用的测量方法.在激光出现后的几年,理论及实验研究上最为重要的是光相干态表述(Glauber,1964)以及对激光统计分布的测量(Arecchi,1966).再后来便是压缩态、纠缠态光的实验以及有关基础物理、量子信息的前沿研究.一般将量子光学看成光学的一个分支.但与其他分支不同的是,它是基础理论,也是一种处理和研究问题的方法,是渗透到各个光学分支的.主要体现为 Langevin 方程、密度矩阵(density matrix)方程以及 Fokker-Planck 方程.与前面的半经典理论 M+S(Maxwell + Schrödinger 方程)相比,现在的全量子理论便应是 L+D+F 了.将后者与前者相比,除了全量子外,作为研究对象主要是含损耗的开放体系.本书的主要目的是介绍这个理论的基础,并涉及它的应用.在取材方面,则是以作者多年在教学与科研方面的积累,经多次整理删节而成,也部分包含了作者及其合作者的一些工作.内容共 8 章,大体可分为三部分.①前三章为光与介质相互作用的半经典与光量子理论、二能级原子的密度矩阵求解及原子的缀饰态,是全书的预备知识.②第 4~7 章为量子光学的主体.第 4 章激光振荡为量子光学早期工作,含热库模型引入、描述激光的 Langevin 方程及激光的统计分布等.第 5 章为量子光学的核心内容,含光的相干性、场的相关函数表示,特别是光的相干态、P 表象、光场的二阶相关函数、群聚与反群聚、鬼态干涉、EPR 悖论、Bell 不等式、光的纠缠态,还有压缩态等.第 6 章为量子光学方法在共振荧光与吸收的应用,包括 Mollow 共振荧光理论、JC 模型,含二能级原子腔的透过率谱.第 7 章为激光偏转原子束,从激光偏转原子开始到光学粘胶,到 Bose-Einstein 凝聚(BEC),为应用量子光学方法的进一步发展.③第 8 章光学参量下转换的动力学及其应用,这是量子光学在参量下转换产生光的纠缠态的具体应用,也涉及一些前沿课题.

由于作者水平有限, 书中有差错与疏漏之处, 请读者批评指正, 作者将十分感谢.

第 8 章原稿由赵超樱仔细校阅. 这一章较多参照她的相关研究工作, 并进行了修订. 在本书成书过程中, 得到郭奇志老师以及方伟、彭新俊等同志的支持与帮助, 作者表示衷心感谢!

谭维翰
上海大学宝山校区
2008 年 5 月

目 录

第 1 章 光与非线性介质相互作用的经典与量子理论	1
1.1 非线性相互作用的经典理论	1
1.1.1 电磁波在非线性介质中的传播	1
1.1.2 极化率张量的对称性	4
1.2 光学中的波波相互作用	7
1.2.1 三波耦合	7
1.2.2 四波耦合	12
1.3 光与非线性介质相互作用的量子理论	16
1.4 弱场微扰法解 Schrödinger 方程	17
1.5 密度矩阵方程及其微扰解法	22
1.5.1 密度矩阵方程	22
1.5.2 用微扰法解密度矩阵方程	25
1.6 波场 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 的量子化	28
1.7 电磁场的量子化	31
1.7.1 电磁场的模式展开	32
1.7.2 电磁场的量子化	33
1.7.3 光子数态 (Fock 态)	35
1.8 原子辐射的线宽与能级移位	36
1.8.1 单原子辐射	36
1.8.2 N 原子辐射	40
附录 1A (1.2.27) 式的解析求解	40
参考文献	41
第 2 章 二能级系统的密度矩阵求解及光脉冲在非线性介质中的传播	43
2.1 二能级原子密度矩阵的矢量模型	43
2.2 Bloch 方程及其解	45
2.3 线性吸收与饱和吸收	48
2.4 光学章动与自由感生衰变	50
2.5 浸渐近似	52
2.6 光脉冲传播的面积定理	53
2.7 光脉冲自聚的多焦点现象	59

2.7.1	光脉冲自聚的准稳态理论	59
2.7.2	光脉冲自聚的不稳定性分析	62
2.7.3	光脉冲自聚的数值计算	65
2.8	光束传输的 $ABCD$ 定理	66
2.8.1	近轴光束传输的 $ABCD$ 定理	66
2.8.2	普适的光束传输 $ABCD$ 定理的证明	67
2.8.3	光束传输的衍射积分计算	71
2.9	光脉冲的“超光速传输”	77
2.9.1	终端波在增益型反常色散介质中的传播	77
2.9.2	矩形脉冲在增益型反常色散介质中的传播	79
2.9.3	Gauss 光脉冲在增益型反常色散介质中的传播	82
附录 2A	(2.6.24) 式的推导	84
附录 2B	(2.7.26) 式的解析求解	85
	参考文献	86
第 3 章	原子的缀饰态	89
3.1	二能级原子 Schrödinger 方程的解	89
3.2	原子的缀饰态	90
3.3	Cohen-Tannoudji 的缀饰原子	92
3.4	原子部分缀饰态及其展开	93
	参考文献	99
第 4 章	激光振荡理论	100
4.1	激光振荡的半经典理论	100
4.1.1	没有激活离子 (或原子) 情形	102
4.1.2	线性极化 $P \propto E$	102
4.1.3	一级近似	103
4.1.4	气体激光的烧孔效应与 Lamb 凹陷	104
4.1.5	多模振荡	107
4.2	激光振荡的全量子理论	109
4.3	热库模型与激光输出的统计分布	110
4.3.1	热库模型	110
4.3.2	激光场与热库相互作用的 Langevin 方程	112
4.3.3	原子体系与热库相互作用的 Langevin 方程	114
4.3.4	辐射场的密度矩阵方程	117
4.3.5	激光输出的统计分布	118
4.4	降低激光泵浦的量子噪声	122

4.4.1	规则泵浦抽运	123
4.4.2	一般泵浦抽运	126
4.5	微激光的量子模式理论	130
4.5.1	激光情形密度矩阵主方程的稳态解	131
4.5.2	微腔的量子模理论	133
4.5.3	在阈值附近微腔量子模主方程解与分步模式解的偏差	134
4.6	单原子与双原子微激光	135
4.6.1	双原子与激光场的相互作用方程	136
4.6.2	单原子、双原子微激光的稳态输出比较	137
	参考文献	139
第 5 章	辐射的相干统计性质	141
5.1	平衡辐射的统计热力学	141
5.2	光的相干性	145
5.2.1	相干条件	145
5.2.2	“光子自干涉”与“同态光子干涉”	147
5.3	光探测	148
5.3.1	理想探测器	148
5.3.2	量子跃迁	149
5.4	场的相关函数与场的相干性	150
5.5	相干态	152
5.6	用相干态展开	156
5.6.1	相干态的 P 表示	156
5.6.2	在 P 表象中参量下转换所满足的 Fokker-Planck 方程	159
5.7	光子的二阶相关函数、群聚与反群聚效应、鬼态干涉与粒子的纠缠态	161
5.7.1	光场分布的二阶相关测量	161
5.7.2	经典光场与非经典光场	165
5.7.3	原子共振荧光场的二阶相关函数分析	168
5.7.4	双光子“鬼态干涉”与 EPR 悖论	172
5.7.5	Bell 不等式与粒子的纠缠态	177
5.7.6	违背 Bell 不等式的几何推导	182
5.8	压缩态光场	184
5.8.1	光子起伏给光学精密测量带来的限制	184
5.8.2	正交压缩态	185
5.8.3	振幅压缩态	190

5.9	非经典光场的探测	192
5.9.1	强度差的零拍探测技术	192
5.9.2	当探测效率 $\eta \neq 1$ 的零拍探测	194
5.10	压缩态光的产生和放大	195
5.10.1	简并参量放大 (或简并四波混频) 产生压缩态光的原理与实验结果	195
5.10.2	简并参量放大与简并四波混频满足的 Langevin 方程与 Fokker-Planck 方程	198
5.10.3	简并参量放大的 Fokker-Planck 方程的解	200
5.10.4	简并四波混频的 Fokker-Planck 方程的解	204
附录 5A	Boson 算子代数	206
附录 5B	最小测不准态	208
附录 5C	关于 (5.7.59) 式、(5.7.70) 式的证明	210
	参考文献	212
第 6 章	原子的共振荧光与吸收	214
6.1	二能级原子与单色光强相互作用的实验研究	214
6.1.1	二能级原子在强光作用下的共振荧光	214
6.1.2	在强场作用下的原子吸收线型	215
6.1.3	二能级原子吸收谱的功率增宽与饱和	217
6.2	二能级原子的共振荧光理论	217
6.2.1	二能级原子与辐射场相互作用方程及其解	217
6.2.2	二能级原子的共振荧光计算	219
6.3	原子在压缩态光场中的共振荧光	223
6.3.1	原子在压缩态光场中的密度矩阵方程	223
6.3.2	原子在压缩态光场中的共振荧光谱	226
6.4	不取旋波近似情形二能级原子的共振荧光谱	227
6.4.1	Mollow 的共振荧光理论与积分的初值条件	228
6.4.2	不采用 RWA 二能级原子系统的 RFS 理论	229
6.4.3	数值计算与讨论	231
6.5	含原子腔的 QED	233
6.5.1	自发辐射的增强与抑制	233
6.5.2	单模场与二能级原子相互作用的 J-C 模型	239
6.5.3	有阻尼情况下单模场与二能级原子相互作用的解析解	243
6.5.4	关于新经典理论的实验检验	247
6.6	含二能级原子腔的透过率谱	247
6.6.1	共振腔中原子的极化率计算	247

6.6.2 含二能级原子腔的透过率谱	249
参考文献	251
第 7 章 激光偏转原子束	256
7.1 激光偏转原子束	256
7.1.1 早期的激光偏转原子束方案	256
7.1.2 激光作用于原子上的力	259
7.1.3 原子在速度空间的扩散	261
7.2 激光冷却原子与光学黏胶	269
7.3 激光偏振梯度冷却原子	273
7.4 光学黏胶温度测量	277
7.5 电磁衰波场对原子的作用力与原子镜	279
7.6 原子镜面对原子量子态选择反射实验	281
7.7 二能级原子在激光衰波场中反射的准确解	283
7.7.1 二能级原子在激光衰波场中满足的 Schrödinger 方程及其解	283
7.7.2 二能级原子波函数的边值条件及反射率计算	287
7.7.3 数值计算与讨论	289
7.8 激光冷却原子与原子的 BEC	290
7.8.1 由“光子服从 Bose 统计”到“理想气体的 Bose 统计”	290
7.8.2 简谐势阱中的中性原子的 BEC	292
7.8.3 排斥相互作用对 BEC 的影响	293
7.8.4 吸引相互作用对 BEC 的影响	298
7.8.5 中性原子的 BEC	305
附录 7A I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 的计算	306
附录 7B 当 y 很小时 $u_g(y)$ 的极限解	309
参考文献	309
第 8 章 光学参量下转换的动力学及其应用	313
8.1 由非简并光学参量放大获得的压缩态	313
8.1.1 产生简并与非简并参量下转换的参量振荡器	313
8.1.2 非简并参量下转换系统满足的 Fokker-Planck 方程	315
8.1.3 简并参量下转换系统的 Fokker-Planck 方程的求解	316
8.1.4 非简并参量下转换系统的量子起伏计算	318
8.1.5 正 P 表象	319
8.2 位相不匹配 Fokker-Planck 方程在 QPM 中的应用	320
8.2.1 位相不匹配情况下的 Fokker-Planck 方程的解	320
8.2.2 参量下转换的 Langevin 方程与 Fokker-Planck 方程解的关系	326

8.2.3	位相不匹配的 Fokker-Planck 方程的解应用到 QPM 技术上	327
8.2.4	数值计算结果与分析	329
8.3	含时的线性驱动简并参量放大系统的量子起伏	331
8.3.1	含时的线性驱动简并参量放大 Fokker-Planck 方程	331
8.3.2	含时的线性驱动 Fokker-Planck 方程的解	334
8.3.3	含时的线性驱动简并参量放大 Fokker-Planck 方程的解	335
8.3.4	简并参量放大系统的量子起伏计算	337
8.3.5	小结	339
8.4	非线性简并光学参量放大系统的量子起伏	339
8.4.1	P 表象中非线性简并参量放大 Fokker-Planck 方程的通解	340
8.4.2	线性近似解	341
8.4.3	非线性项修正	342
8.4.4	小结	345
8.5	应用非简并参量放大输出演示 EPR 佯谬	345
8.5.1	复合系统不可分的 $V_1 V_2$ 判据	346
8.5.2	非简并参量放大输出实现 EPR 佯谬的理论分析	347
8.5.3	考虑到泵浦吃空解含时的 Fokker-Planck 方程对 $V_1(V_2)$ 的计算	351
8.5.4	小结	351
8.6	周期泵浦驱动的 DOPA 的量子起伏以及 NOPA 的量子纠缠	353
8.7	应用 N 个非简并参量放大输出演示 EPR 佯谬	355
8.7.1	单个简并参量系统的 Fokker-Planck 方程的解	355
8.7.2	多粒子纠缠的 V 判据	356
8.7.3	三粒子纠缠 ($N = 3$)	360
8.7.4	N 粒子纠缠 ($N > 3$)	363
8.7.5	N 粒子纠缠的数值计算与讨论	365
8.8	复合系统的密度矩阵分解	366
8.8.1	2×2 复合系统	367
8.8.2	3×3 复合系统	376
8.8.3	小结	386
8.9	由超短光脉冲产生多光子纠缠态	386
附录 8A	关于方程 (8.4.4) 的证明	389
附录 8B	3×3 密度矩阵函数, 可分离的密度矩阵及可分离的密度矩阵 方块	391
附录 8C	对角方块矩阵 D_{1r} 的特征值	397
参考文献		399

第1章 光与非线性介质相互作用的经典 与量子理论

光波在非线性介质中的传播、通过非线性介质的波波相互作用及非线性介质极化率计算, 均属非线性光学研究的重要内容^[1~3]. 本章, 首先讨论在给定非线性极化率情况下的波波耦合问题, 着重讨论三波耦合及四波耦合, 其中涉及了很多我们所关心的非线性光学现象. 理论基础是 Maxwell 方程, 属经典理论; 其次讨论非线性介质的极化率计算, 理论基础是 Maxwell 方程与 Schrödinger 方程, 属半经典理论. 最后简要讨论粒子表象、场的量子化规则、原子辐射的线宽与能级移位等.

1.1 非线性相互作用的经典理论

1.1.1 电磁波在非线性介质中的传播

我们从电磁波传播所满足的 Maxwell 方程出发 (Gauss 单位 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

式中, ρ 、 \mathbf{J} 分别为自由电荷密度、自由电流密度, \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 分别为电场强度、磁场强度, \mathbf{B} 为磁感应强度, \mathbf{D} 为电位移. Maxwell 方程组是描述电磁波在介质包括非线性介质中传播和相互作用的基础. 在非线性光学介质中通常遇到的情形是自由电荷密度 ρ , 自由电流密度 \mathbf{J} 均为 0, 而且介质是非磁性的 $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. 电位移 \mathbf{D} 可通过电场强度 \mathbf{E} 与极化矢量 \mathbf{P} 表示出来, 故有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (1.1.4)$$

非线性光学介质的性质, 主要从 (1.1.4) 式中的极化矢量 \mathbf{P} 体现出来. 如果略去 \mathbf{P} , 即略去感生极化对电磁波传播的影响, 便得到真空中的传播方程

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

或者用二分量表示 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$, 则 (1.1.5) 式可写为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.1.6)$$

由此易于得出 $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ 的二阶波动方程

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \nabla \times \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

如果考虑到极化矢量 \mathbf{P} 的影响, 则 (1.1.6) 式应写为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

从波动方程 (1.1.8) 消去 \mathbf{H} 分量, 便得 \mathbf{E} 分量的含非线性耦合项 \mathbf{P} 的传播方程即

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \quad (1.1.9)$$

现将极化强度 \mathbf{P} 写成线性部分 $\mathbf{P}^{(1)}$ ($\propto \mathbf{E}$) 与非线性部分 \mathbf{P}^{NL} 之和, 并令

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}^{(1)} = \check{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (1.1.10)$$

式中, $\check{\epsilon}$ 为并矢. 如果介质为各向同性的, 则并矢 $\check{\epsilon}$ 可写为标量 ϵ , (1.1.10) 式可用下式代替:

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}^{(1)} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.1.11)$$

于是 (1.1.9) 式可写为

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{\text{NL}} \quad (1.1.12)$$

式中, 右边为波动方程的驱动项, 即介质对场响应的非线性部分, 而线性部分已包括在左边电介质系数 ϵ 中, $\epsilon = n^2$, $n = n' + in''$. 而 n' 、 $\alpha = 2n''\omega/c$ 分别为波在介质中传播的折射率与吸收系数. 一般来说, 电介函数 ϵ 是场 $E(\mathbf{r}, t)$ 的振动频率的函数. 故 (1.1.11) 式和 (1.1.12) 式中的 ϵ 应理解为作用于振动 $E(\mathbf{r}, t)$ 的算子 $\epsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)$, 若 $E(\mathbf{r}, t)$ 可表示为主振动 $e^{-i\omega t}$ 与慢变振幅 $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ 之积, 即 $E(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t}$, 则有 $\epsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)E(\mathbf{r}, t) \simeq \epsilon(\omega)E(\mathbf{r}, t)$. 由于 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, 对于各向同性介质, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, 在一般情形下, 前一项 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ 的贡献很小, 可以略去. 于是 (1.1.12) 式可写为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{\text{NL}} \quad (1.1.13)$$

为便于表现波波相互作用, 将波动方程 (1.1.13) 按波数 k_n 、频率 ω_n 作慢变振幅展开

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum'_n \mathbf{E}_n e^{-i\omega_n t} + \text{c.c.} \\ &= \sum'_n \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r})} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

式中, 左端和式 \sum' 上的一撇表示只对正频求和; 没有一撇表示对正、负频求和, 即

$$\mathbf{P}^{\text{NL}} = \sum'_n \mathbf{P}_n(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_n t} \quad (1.1.15)$$

$$-k_n^2 + \frac{\epsilon(\omega_n)}{c^2} \omega_n^2 = 0 \quad (1.1.16)$$

注意因子 $\exp[-i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r})]$ 虽代表平面波, 但 $\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t)$ 为 (\mathbf{r}, t) 的慢变函数, $\mathbf{P}_n(\mathbf{r}, t)$ 为 t 的慢变函数, 故 \mathbf{E} 、 \mathbf{P} 展开的每一项均可偏离于平面波. 将 (1.1.14) 式和 (1.1.15) 式代入 (1.1.13) 式, 并注意到色散关系 (1.1.16) 式及慢变近似 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_n \simeq 0$, $\nabla^2 \mathbf{A}_n \simeq 0$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_n \simeq 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_n \simeq 0$ 等, 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_n + v_n \frac{\mathbf{k}_n}{k_n} \cdot \nabla \mathbf{A}_n \right) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} &= \frac{i2\pi\omega_n}{\epsilon(\omega_n)} \mathbf{P}_n(\omega_n) \\ v_n &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega_n)}} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

非线性极化 $\overline{\mathbf{P}}^{\text{NL}}$ 的展开可写为

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^{(2)} + \mathbf{P}_n^{(3)} + \dots \quad (1.1.18)$$

$P_n^{(2)}, P_n^{(3)}, \dots$ 分别为二波, 三波, \dots 展开项, 其分量为 $(E_n, P_n^{(2)}, P_n^{(3)}, \dots$ 均依赖于 r , 下面为书写方便, 不写出与 r 的依赖关系)

$$\begin{aligned} P_{ni}^{(2)}(\omega_n = \omega_p + \omega_q) &= \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) E_j(\omega_p) E_k(\omega_q) \\ P_{ni}^{(3)}(\omega_n = \omega_p + \omega_q + \omega_r) &= \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_p + \omega_q + \omega_r, \omega_p, \omega_q, \omega_r) E_j(\omega_p) E_k(\omega_q) E_l(\omega_r) \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

注意 (1.1.17) 式中 A_n 也可以是其共轭项 A_n^* , 相应地 (ω_i, \mathbf{k}_i) 用 $(-\omega_i, \mathbf{k}_i)$ 来代替, A_j, A_k 也是这样. (1.1.19) 式中的极化率张量 $\chi_{ijk}^{(2)}, \chi_{ijkl}^{(3)}$ 是唯象引进的, 如何在量子力学微扰论的基础上计算这些张量, 是下面要讨论的问题.

1.1.2 极化率张量的对称性

这节我们主要讨论二阶极化张量, 向三阶或更高阶极化张量推广是容易的. 二阶极化张量与场的各分量间的关系为

$$P_i^{(2)}(\omega_p + \omega_q) = \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) E_j(\omega_p) E_k(\omega_q) \quad (1.1.20)$$

二阶极化张量是描述三波相互作用的, 它包括和频、倍频、差频及参量放大等过程. 当三个波的频率 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 给定后, 通过 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的重排, 有 $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_3, \omega_2), \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, \omega_1, \omega_3), \dots$ 六个分量, 又通过 i, j, k 的重排列, 有 $3^3 = 27$ 个分量, 还有 $\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3), \dots$, 又增加一倍, 故共有 $6 \times 3^3 \times 2 = 324$ 个分量, 但并非所有的这些分量都是独立的. 考虑到极化强度 P_i 及场强 E_j 均为实函数, 要求

$$P_i(-\omega_p - \omega_q) = P_i^*(\omega_p + \omega_q) \quad (1.1.21)$$

$$E_j(-\omega_p) = E_j^*(\omega_p), \quad E_k(-\omega_q) = E_k^*(\omega_q)$$

由 (1.1.20) 式和 (1.1.21) 式易看出

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) = \chi_{ijk}^{(2)*}(-\omega_p - \omega_q, -\omega_p, -\omega_q) \quad (1.1.22)$$

再注意到将 (1.1.20) 式中的 $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) E_j(\omega_p) E_k(\omega_q)$ 可写成 $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) E_k(\omega_q) E_j(\omega_p)$ 形式, 对 $P^{(2)}(\omega_p + \omega_q)$ 的贡献应是一样的, 应有

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_q + \omega_p, \omega_q, \omega_p) \quad (1.1.23)$$

而且对无损介质来说, 极化率张量 $\chi_{ijk}^{(2)}$ 应是实数, 各种频率重排后, 相应的指标

(i, j, k) 也随之重排, 极化张量的值不变, 即

$$\begin{aligned}\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) \\ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{kji}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) \\ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1)\end{aligned}\quad (1.1.24)$$

更进一步有

$$\begin{aligned}\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)\end{aligned}\quad (1.1.25)$$

(1.1.25) 式一般称为 Kleiman 猜想, 只有当 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 远小于非线性介质的共振频率时才成立. 这时极化率张量基本与频率无关.

如 Kleiman 猜想成立, 即在二阶极化率与频率 ω 无关的情形下, 实用中还常用张量缩写记号

$$d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)} \quad (1.1.26)$$

l 与 jk 间的对应关系为

$$\begin{array}{cccccc}jk: & 11 & 22 & 33 & 23, 32 & 31, 13 & 12, 21 \\ l: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}$$

d_{il} 有 18 个分量, 但并非全是独立的. 通过重排还有关系

$$\begin{aligned}d_{12} &= d_{122} = d_{212} = d_{26} \\ d_{14} &= d_{123} = d_{213} = d_{25}\end{aligned}\quad (1.1.27)$$

同样可证

$$\begin{aligned}d_{16} &= d_{21}, & d_{31} &= d_{15}, & d_{32} &= d_{24} \\ d_{34} &= d_{23}, & d_{35} &= d_{13}, & d_{36} &= d_{14}\end{aligned}\quad (1.1.28)$$

故 18 个分量中只有 10 个是独立的.

倍频与和频的极化率张量可表示为

$$\begin{pmatrix} P_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_z(2\omega) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ d_{21} & \cdots & d_{26} \\ d_{31} & \cdots & d_{36} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x(\omega)^2 \\ E_y(\omega)^2 \\ E_z(\omega)^2 \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{pmatrix} \quad (1.1.29)$$

$$\begin{pmatrix} P_x(\omega_3) \\ P_y(\omega_3) \\ P_z(\omega_3) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ d_{21} & \cdots & d_{26} \\ d_{31} & \cdots & d_{36} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_x(\omega_2) + E_x(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_y(\omega_2) + E_y(\omega_1)E_x(\omega_2) \end{pmatrix} \quad (1.1.30)$$

比较 (1.1.29) 式与 (1.1.30) 式便看出和频比倍频多了一个因子 2, 这是由于交换 ω_p 、 ω_q 引起的。

非线性极化张量所反映的非线性介质的空间对称性, 实际上已包含在 $\chi_{ijk}^{(2)}$ 对空间分量 i 、 j 、 k 的依赖中了。例如, 我们考虑一晶体, 它关于 x 、 y 方向为对称的, 即沿 z 方向转 90° , 晶体将自身重合。对于这样的晶体, 光场沿 x 方向偏振或 y 方向偏振的响应用极化分量 $\chi_{zxx}^{(2)}$ 与 $\chi_{zyy}^{(2)}$ 来表示是一样的。总之, 晶体的各种空间对称性均反映到极化张量 $\chi_{ijk}^{(2)}$ 中来。特别是空间反演对称, 即具有反演中心对称晶体, 可证二阶张量为 0 ($\chi^{(2)} = 0$)。以二次谐波的产生为例, 当作用于晶体的场强为 $E(t) = \varepsilon \cos \omega t$, 产生的非线性极化为

$$P(t) = \chi^{(2)} E^2(t) \quad (1.1.31)$$

现在改变 $E(t)$ 的符号, 使之成为 $-E(t)$ 。按反演中心特征, 感生的极化 $P(t)$ 也改变为 $-P(t)$, 于是有

$$-P(t) = \chi^{(2)} [-E(t)]^2 \quad (1.1.32)$$

比较 (1.1.31) 式与 (1.1.32) 式, 必然有 $P(t) = 0$, 即 $\chi^{(2)} = 0$ 。

对于非中心对称晶体, Miller 还给出经验公式^[4]

$$\frac{\chi^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2)}{\chi(\omega_1 + \omega_2)\chi(\omega_1)\chi(\omega_2)} = \frac{ma}{N^2 e^3}, \quad a = \frac{\omega_0^2}{d} \quad (1.1.33)$$

它差不多是一个常数。 ω_0 、 d 分别为晶体的共振频率与晶格常数, 而

$$\chi = -\frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \simeq -\frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2} \quad (1.1.34)$$

将 (1.1.34) 式代入 (1.1.33) 式, 并令 $N = 1/d^3$, 得

$$\chi^{(2)} = -\frac{Ne^3}{m^2} \frac{a}{\omega_0^6} = -\frac{Ne^3}{m^2} \frac{1}{\omega_0^4} \frac{1}{d} = -\frac{e^3}{m^2 \omega_0^4 d^4} \quad (1.1.35)$$

用典型参量 $\omega_0 = 1 \times 10^{16} \text{ rad/s}$, $d = 3 \text{ \AA}$, $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$, $m = 9.1 \times 10^{-28} \text{ g}$ 代入, 最后得 $|\chi^{(2)}| \simeq 3 \times 10^{-8} \text{ esu}$ 。这与实际测定数值的量级相近。用同样方法可估算出

三阶极化率为

$$\chi^{(3)} \simeq \frac{Nbe^4}{m^3\omega_0^8} = \frac{e^4}{m^3\omega_0^6 d^5} \simeq 3 \times 10^{-15} \text{ esu} \quad (1.1.36)$$

1.2 光学中的波波相互作用

1.2.1 三波耦合

对于三波相互作用, 如果满足共振条件及相位匹配条件, 则应用 (1.1.17) 式和 (1.1.19) 式, 易于导出三波相互作用方程. 事实上, 令 $n = 0, 1, 2$, 则得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \cdot \nabla \right) A_0 &= i \frac{4\pi\omega_0}{\epsilon(\omega_0)} \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_1, \omega_2) A_1 A_2 \mathcal{K} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\mathbf{k}_1}{k_1} \cdot \nabla \right) A_1 &= i \frac{4\pi\omega_1}{\epsilon(\omega_1)} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_0, -\omega_2) A_0 A_2^* \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{\mathbf{k}_2}{k_2} \cdot \nabla \right) A_2 &= i \frac{4\pi\omega_2}{\epsilon(\omega_2)} \chi^{(2)}(\omega_2, \omega_0, -\omega_1) A_0 A_1^* \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

当 $\omega_1 \neq \omega_2$ 时, $\mathcal{K} = 1$; 当 $\omega_1 = \omega_2$ 时, $\mathcal{K} = 1/2$, 理由在推导 (1.1.29) 式和 (1.1.30) 式时已提过. 如 $A_0 \sim A_2$ 不明显地依赖于时间 t , 且 $\frac{\mathbf{k}_i}{k_i} \cdot \nabla = \frac{d}{dx}$, $i = 0 \sim 2$, 当相位不完全匹配, 并引进参数 $\tilde{\beta}_0$ 、 $\tilde{\beta}_1$ 、 $\tilde{\beta}_2$ 时, 则三波耦合方程可由 (1.2.1) 式写为

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dx} &= i\tilde{\beta}_0 A_1 A_2 e^{-i\Delta kx}, \quad \tilde{\beta}_0 = \frac{4\pi\omega_0}{\epsilon(\omega_0)v_0} \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \mathcal{K} \\ \frac{dA_1}{dx} &= i\tilde{\beta}_1 A_0 A_2^* e^{i\Delta kx}, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{4\pi\omega_1}{\epsilon(\omega_1)v_1} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_0, -\omega_2) \\ \frac{dA_2}{dx} &= i\tilde{\beta}_2 A_0 A_1^* e^{i\Delta kx}, \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{4\pi\omega_2}{\epsilon(\omega_2)v_2} \chi^{(2)}(\omega_2, \omega_0, -\omega_1) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

式中, $\Delta k = k_0 - k_1 - k_2$. 因子 $e^{-i\Delta kx}$ 、 $e^{i\Delta kx}$ 是考虑到相位不完全匹配而引进的. 形如 (1.2.2) 式的三波耦合方程, 包括了非线性光学和频 ($\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$)、倍频 ($\omega_0 = \omega_1 + \omega_1$)、差频 ($\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$). 作变换

$$\frac{A_i e^{-i\Delta kx}}{\tilde{\beta}_i^{1/2}} \Rightarrow C_i, \quad i = 0, 1, 2 \quad (1.2.3)$$

并令

$$\zeta = x \sqrt{\tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2}, \quad \Delta s = \frac{\Delta k}{\sqrt{\tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2}} \quad (1.2.4)$$

则 (1.2.2) 式可化为

$$\left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s \right) C_0 = iC_1 C_2$$

$$\left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right) C_1 = iC_0 C_2^* \quad (1.2.5)$$

$$\left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right) C_2 = iC_0 C_1^*$$

令 $C_i = |C_i|e^{i\theta_i}$, $\theta = \theta_0 - \theta_1 - \theta_2$, 则 (1.2.5) 式的实部与虚部为

$$\begin{aligned} \frac{d|C_0|}{d\zeta} &= |C_1||C_2| \sin \theta \\ \frac{d|C_1|}{d\zeta} &= -|C_0||C_2| \sin \theta \\ \frac{d|C_2|}{d\zeta} &= -|C_0||C_1| \sin \theta \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \Delta s + \left(\frac{|C_1||C_2|}{|C_0|} - \frac{|C_0||C_2|}{|C_1|} - \frac{|C_0||C_1|}{|C_2|}\right) \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

积分 (1.2.6) 式, 得

$$\begin{aligned} |C_0|^2 + |C_1|^2 &= n_0 + n_1 = m_1 \\ |C_0|^2 + |C_2|^2 &= n_0 + n_2 = m_2 \\ |C_1|^2 - |C_2|^2 &= n_1 - n_2 = m_3 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$$|C_0||C_1||C_2| \cos \theta - \frac{1}{2}|C_0|^2 \Delta s = m_0$$

将 (1.2.7) 式代入 (1.2.6) 式的第一式, 得

$$\frac{dn_0}{d\zeta} = 2\sqrt{n_0(m_1 - n_0)(m_2 - n_0) - \left(m_0 + \frac{1}{2}n_0\Delta s\right)^2} \quad (1.2.8)$$

(1.2.8) 式的积分, 即 Weierstrass 积分, 可通过 Jacobi 椭圆函数 sn 来表示. 设 n_a 、 n_b 、 n_c 为

$$n_0(m_1 - n_0)(m_1 - n_0) - \left(m_0 + \frac{1}{2}n_0\Delta s\right)^2 = 0$$

的三个根, 且 $n_a \geq n_b \geq n_c \geq 0$, 则 $n_0(\zeta)$ 可表示为

$$\begin{aligned} n_0(\zeta) &= n_c + (n_a - n_c) \left\{ \text{sn}^2 \left[(n_a - n_c)^{1/2} (\zeta - \zeta_0), m \right] \right\}^{-1} \\ m &= \left(\frac{n_b - n_c}{n_a - n_c} \right)^{1/2}, \quad n_0(\zeta_0) = n_c \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

1. 二次谐波

将解 (1.2.9) 应用到二次谐波情形^[6], 如图 1.1(a) 所示, 频率为 ω_1 的基波进入非线性晶体, 经过波波相互作用, 就会产生频率二倍于基波的二次谐波. 应用上面公式处理这问题, 便是 $|C_1| = |C_2| = u_1$ 为基波振幅, $|C_0| = u_2$ 为二次谐波振幅. (1.2.6) 式化为

$$\begin{aligned}\frac{du_2}{d\zeta} &= u_1^2 \sin \theta \\ \frac{du_1}{d\zeta} &= -u_1 u_2 \sin \theta \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \Delta s + \left(\frac{u_1^2}{u_2} - 2u_2 \right) \cos \theta\end{aligned}\quad (1.2.10)$$

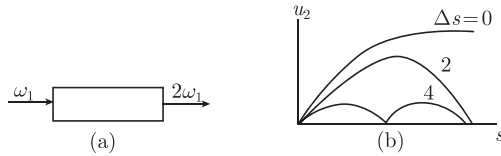


图 1.1 二次谐波的产生

设初始时二次谐波 $|C_0| = u_2 = 0$, 由 (1.2.7) 式, 故有

$$|C_0|^2 + |C_1|^2 = u_2^2 + u_1^2 = m_1, \quad m_0 = 0 \quad (1.2.11)$$

代入 (1.2.8) 式, 得

$$\frac{dn_0}{d\zeta} = 2\sqrt{n_0(m_1 - n_0)^2 - \left(\frac{1}{2}n_0\Delta s\right)^2} \quad (1.2.12)$$

经规一化

$$n_0/m_1 \rightarrow n_0, \quad \Delta s/m_1^{1/2} \rightarrow \Delta s, \quad m_1^{1/2}\zeta \rightarrow \zeta \quad (1.2.13)$$

(1.2.12) 式可写为

$$\frac{dn_0}{d\zeta} = 2\sqrt{n_0(1 - n_0)^2 - \left(\frac{1}{2}n_0\Delta s\right)^2} \quad (1.2.14)$$

图 1.1(b) 给出 $u_2 = n_0^{1/2}$ 随 ζ 的变化曲线, 只有在相位完全匹配 ($\Delta s = 0$) 的情况下, u_2 随 ζ 单调增长, 并达于饱和; 当位相不匹配, $\Delta s \neq 0$, u_2 随 ζ 周期变化, 其最大幅度随 Δs 的增大而递减.

在完全相位匹配的情形 ($\Delta s = 0$), n_0 的 Jacobi 椭圆函数解将退化到可用初等函数来表示. 因 $u_2 = n_0^{1/2}$, 方程 (1.2.14) 可写为

$$\frac{du_2}{d\zeta} = 1 - u_2^2, \quad u_2 = \tanh(\zeta + \zeta_0), \quad n_0 = \tanh^2(\zeta + \zeta_0) \quad (1.2.15)$$

注意到上述结果是在采用归一化 (1.2.13) 式后得到的, 在未归一化前

$$\begin{aligned} m_1 = u_1^2 + u_2^2 &= \frac{A_1^2}{\frac{4\pi\omega_1}{n_1c}\chi^{(2)}} + \frac{A_2^2}{\frac{4\pi\omega_2}{n_2c}\chi^{(2)}/2} \\ &= \frac{1}{2d} \left(\frac{I_1}{2\omega_1} + \frac{I_2}{\omega_2} \right) = \frac{I}{2d\omega_2} \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

式中, $d = \frac{1}{2}\chi^{(2)}$ 为二阶非线性系数, $I_1 = \frac{n_1c}{2\pi}A_1^2$, $I_2 = \frac{n_2c}{2\pi}A_2^2$ 分别为基波与谐波的光强. (1.2.11) 式表明总光强 I 是一常量. 归一化后的 u_1 、 u_2 满足

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \quad u_1 = \sqrt{1 - u_2^2} = \operatorname{sech}[\zeta], \quad \zeta = x\sqrt{\beta_0\beta_1}m_1^{1/2} = x/l \quad (1.2.17)$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi\omega_2}{n_2c}d} \frac{8\pi\omega_1}{n_1c}d} \frac{1}{\sqrt{\frac{I}{2d\omega_2}}} = \frac{(n_1^2n_2c^3)^{1/2}}{\sqrt{2\pi I}8\pi\omega_1d} = \frac{(n_1n_2)^{1/2}c}{8\pi\omega_1d|A_1(0)|} \quad (1.2.18)$$

又设基波光斑半径为 w_1 , 焦深为 b , 入射激光功率为 P , 并将非线性介质厚度 L 取为 b , 即

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{n_1c}{2\pi}A_1^2 = \frac{P}{\pi w_1^2} \\ b &= \frac{2\pi w_1^2 n_1}{\lambda_1} = L \end{aligned}$$

由此消去 w_1 , 得

$$A_1 = \left(\frac{4\pi P}{c\lambda_1 L} \right)^{1/2} \quad (1.2.19)$$

将 (1.2.19) 式代入 (1.2.17) 式, 得 $\zeta = L/l$ 为

$$\zeta = \left(\frac{1024\pi^5 d^2 L P}{n_1 n_2 c \lambda_1^3} \right)^{1/2} \quad (1.2.20)$$

典型的参量取值为 $d = 1 \times 10^{-8}$ esu, $L = 1$ cm, $P = 1\text{W} = 1 \times 10^7$ erg/s, $\lambda_1 = 0.5 \times 10^{-4}$ cm, $n_1 = n_2 = 2$, 则按 (1.2.20) 式算得 $\zeta = 0.14$, 由基波至谐波的转换效率为

$$\eta = \frac{u_2^2(\zeta)}{u_1^2(0)} = 0.02 \quad (1.2.21)$$

η 的计算应用了 (1.2.15) 式和 (1.2.18) 式. u_1 、 u_2 随 ζ 的变化见图 1.2.